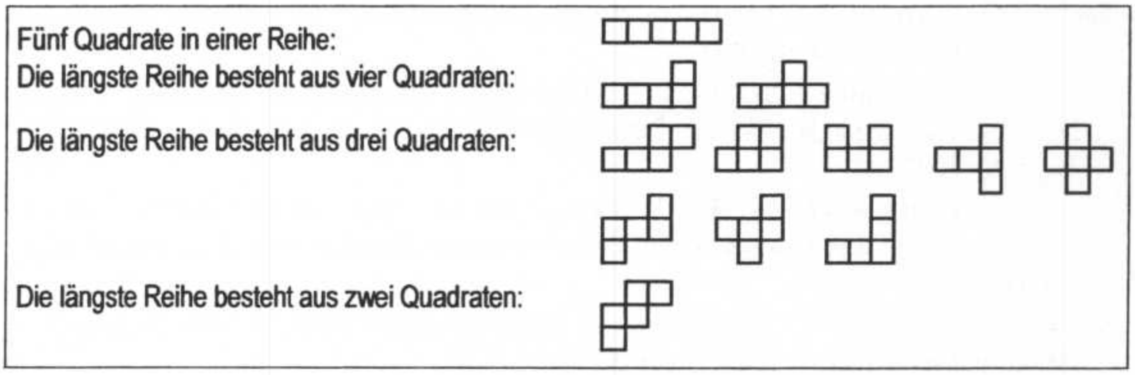
Pentominos im Geometrieunterricht

von Maria Koth und Notburga Grosser

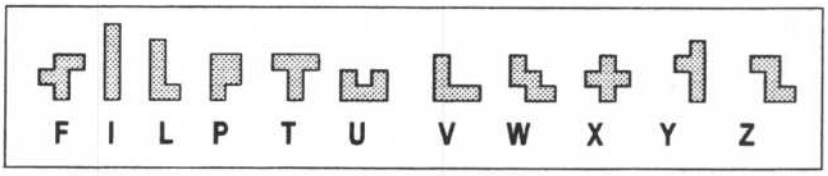
0. Was sind Pentominos ?

Die zugrundeliegende Idee ist bestechend einfach: Fünf Einheitsquadrate werden so aneinandergefügt, dass je zwei benachbarte Quadrate eine gemeinsame Seite haben. Bleiben gespiegelte bzw. gedrehte Lagen unberücksichtigt, so entstehen auf diese Weise zwölf verschiedene Figuren:



Die Entstehung der zwölf Pentomino

Jede dieser Figuren hat Ähnlichkeit mit einem Buchstaben des Alphabets, daher werden Pentominos üblicherweise mit F, I, L, N, P, T, U, V, W, X, Y, Z bezeichnet. Für diese Zuordnung braucht man zwar etwas Phantasie, doch sie hilft, die einzelnen Figuren zu unterscheiden und in verschiedenen Symmetrielagen zu erkennen.



Bezeichnung der Pentominos

Der Name „Pentomino“, der aus der griechischen Vorsilbe für die Zahl Fünf und der Nachsilbe -omino gebildet wird, geht auf den amerikanischen Mathematiker Salomon Golomb zurück. In seinem 1954 in der Zeitschrift American Math. Monthly erschienenen Artikel [7] untersucht er aus mehreren Quadraten zusammengesetzte Figuren, und führt die Bezeichnungen Tetromino, Pentomino, Hexomino, Heptomino etc. ein. Als Ominofigur wird seither eine Form bezeichnet, bei der Einheitsquadrate Seite an Seite aneinandergereiht sind.

Durch Martin Gardners Puzzle-Kolumne in der Zeitschrift „Scientific American" wurden diese Polyformen einem breiteren Publikum bekannt. Polyominos sind mittlerweile zu einem beliebten Thema der unterhaltungsmathematischen Literatur geworden (siehe [12]).

	Einheitsquadrate pro Figur	**Anzahl der Figuren**	**Gesamtfläche aller Figuren**
Monomino	1	1	1
Domino	2	1	2
Tronimo	3	2	6
Tetronimo	4	5	20
Pentomino	**5**	**12**	**60**
Hexomino	6	35	210
Heptomino	7	108	756
Oktomino	8	369	2952
Nonomino	9	1285	11565
Dekomino	10	4655	46550
Undekomino	11	17073	187803
Dodekomino	12	63600	763200

Die Familie der Polyominos

Ein Blick auf die Tabelle der Polyominos - gebildet aus einem bis zwölf Einheitsquadraten – zeigt, dass die Zahl der möglichen Figuren sehr rasch anwächst. Für mathematische Aufgaben der Sekundarstufe I bieten sich unter allen Polyominos vor allem die zwölf Pentominos in ihrer überschaubaren Anzahl an: Sind die fünf Tetrominos für interessante Aufgabenstellungen zu wenige, so mangelt es bei vielen Problemen mit den 35 Hexominos bereits an Übersichtlichkeit. Erwähnenswert in diesem Zusammenhang ist, dass die fünf Tetrominos durch das Computerspiel „Tetris" einen weltweiten Bekanntheitsgrad erreicht haben.

Viele Menschen zeigen ein spontanes Interesse an Pentominos. Sie sind von den Problemstellungen, die auf den ersten Blick einfach und verständlich wirken, fasziniert. Es ist vielleicht der Spieltrieb, der die Beschäftigung mit Pentominos charakterisiert. Mathematische Zusammenhänge werden vor allem Kindern auf eine sehr intuitive Art zugänglich gemacht. Die Auseinandersetzung mit Mathematik ist auf diese Weise alles andere als langweilig.

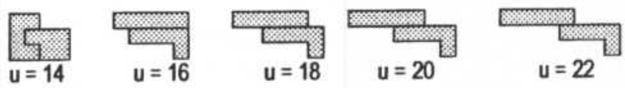
Im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I ermöglichen Pentominos handlungsorientierte Zugänge zu Flächen- und Umfangsbestimmungen, zum Arbeiten mit symmetrischen Figuren und auch zum Arbeiten mit dem Kongruenz- und Ähnlichkeitsbegriff. Aufgabenstellungen mit Pentominos ermuntern Schülerinnen und Schüler zum Argumentieren und Begründen, eröffnen Möglichkeiten zum entdeckenden Lernen und bieten außerdem eine abwechslungsreiche Übungsmöglichkeit. Pentomino-Problemstellungen können sowohl im herkömmlichen Mathematikunterricht als auch in offenen Lernsituationen sinnvoll eingesetzt werden. Im Folgenden werden einige Beispiele für mögliche Fragestellungen vorgestellt; viele kopierfertig gestaltete Arbeitsblätter für den Mathematikunterricht findet man etwa in [9].

1. Umfangs- und Flächenprobleme

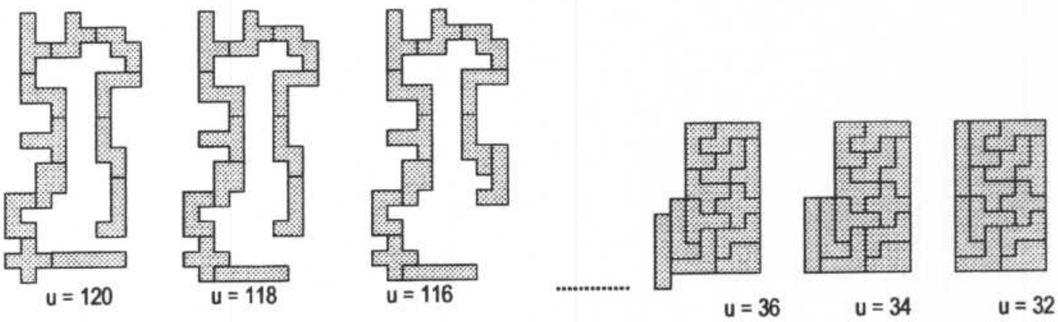
Im Mathematiklehrplan der fünften Schulstufe ist das Arbeiten mit Umfängen und Flächeninhalten von aus Rechtecken zusammengesetzten Figuren vorgesehen. Ominofiguren bieten sich hier in idealer Weise an.

a) Der Umfang von Ominofiguren

Zwei Pentominos kann man auf vielerlei Arten zu 10-Ominofiguren zusammenfügen. Alle diese Figuren haben Flächeninhalt zehn, ihr Umfang dagegen kann die Werte 14, 16, 18, 20 oder 22 annehmen. Solche Ominofiguren machen deutlich, dass flächengleiche Figuren nicht unbedingt auch gleich großen Umfang haben.



Analog dazu kann man Ominofiguren aus drei, aus vier, aus fünf,......, aus allen zwölf Pentominos betrachten, und überlegen, welche Werte der Umfang dieser Figuren annehmen kann.



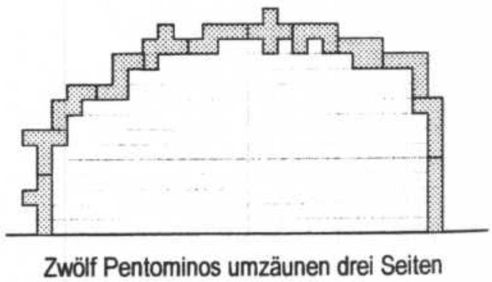
Aus allen zwölf Pentominos zusammengesetzte 60-Ominofiguren können Umfang 32, 34, 36, ..., 120 haben.

Jeder dieser Ominofiguren kann man weiterst ihr umschließendes Rechteck zuordnen (d.h. das flächenkleinste Rechteck, das die Ominofigur bedeckt und dessen Seiten parallel zu den Pentominoseiten liegen), und den Umfang der Ominofigur mit dem Umfang dieses Rechtecks vergleichen.

b) Pentominos umzäunen ein Flächenstück

Die folgende Abbildung zeigt Flächenstücke, die von Pentominos umzäunt werden. Die Pentominos sollen dabei nicht nur an einer Ecke zusammenstoßen, sondern die Fläche wie eine Mauer umgeben.

Zwölf Pentominos umzäunen eine Fläche der Größe 128.

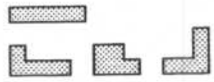
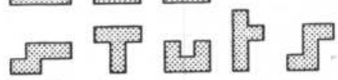


Zwölf Pentominos umzäunen drei Seiten einer Fläche der Größe 276.

- Welche größte Fläche kann man mit zwei, mit drei, mit vier,....., mit allen Pentominos umzäunen?
- Angenommen, ein Flächenstück grenzt mit einer Seite an eine (beliebig lange) Mauer, und wird nur an den übrigen Seiten von Pentominos begrenzt. Welche größte Fläche kann man mit zwei, mit drei, mit vier, ... mit allen zwölf Pentominos dreiseitig umzäunen?

2. Ominofiguren als Beispiele für Vielecke

Mit dem Vielecksbegriff verbinden viele Schülerinnen und Schüler primär die Vorstellung von regelmäßigen Polygonen. Pentominos liefern Beispiele für n–Ecke ist, die nicht auf den ersten Blick diesem Prototyp entsprechen.

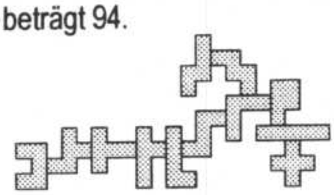
Seitenzahl	Pentomino
4	
6	
8	
10	
12	

Pentominos als Beispiele für n–Ecke, die nicht regelmäßig und nicht notwendig konvex sind.

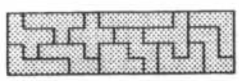
Aus zwei Pentominos kann man n - Ecke mit den Seitenzahlen n = 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 und 20 bilden. Diese besitzen höchstens eine Symmetrieachse.

n = 6 n =8 n = 10 n = 12 n = 14 n = 16 n = 18 n = 20

Weiterführend kann man Vielecke, bestehend aus drei, aus vier, aus fünf,......, aus allen zwölf Pentominos betrachten. Die maximale Seitenzahl eines aus allen zwölf Pentominos gebildeten n – Ecks beträgt 94.



Zwölf Pentominos bilden ein 94 – Eck

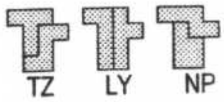


Zwölf Pentominos bilden ein Viereck

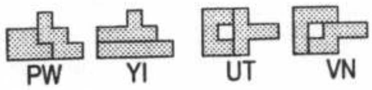
3. Kongruente Figuren

Pentominos ermöglichen darüber hinaus auch einen spielerischen Zugang zum Kongruenzbegriff und zum Arbeiten mit symmetrischen Figuren. Aus den zwölf Pentominos kann man auf vielerlei Arten Gruppen zueinander kongruenter Figuren zusammensetzen, zum Beispiel:

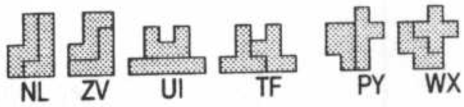
a) Drei kongruente Figuren aus je zwei Pentominos



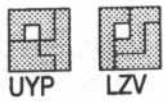
b) Zwei Paare kongruenter Figuren aus je zwei Pentominos



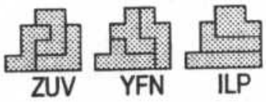
c) Drei Paare kongruenter Figuren aus je zwei Pentominos



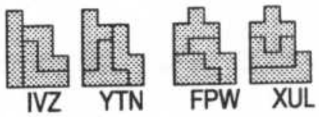
d) Zwei kongruente Figuren aus je drei Pentominos



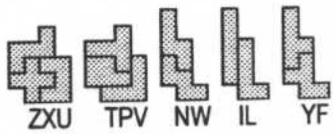
e) Drei kongruente Figuren aus je drei Pentominos



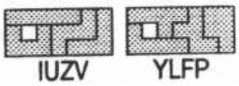
f) Zwei Paare kongruenter Figuren aus je drei Pentominos



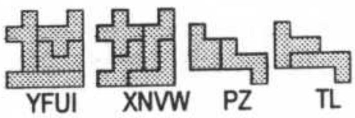
g) Zwei kongruente Figuren aus je drei Pentominos und drei kongruente Figuren aus je zwei Pentominos



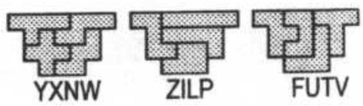
h) Zwei kongruente Figuren aus je vier Pentominos



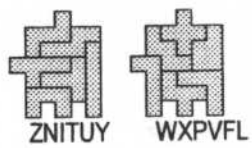
i) Zwei kongruente Figuren aus je vier Pentominos und zwei kongruente Figuren aus je zwei Pentominos



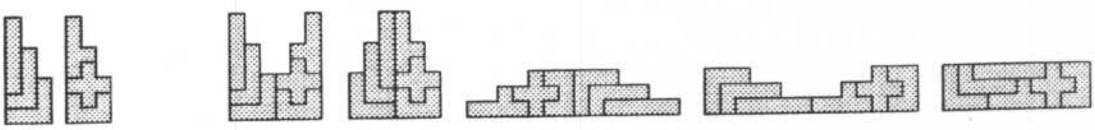
j) Drei kongruente Figuren aus je vier Pentominos



k) Zwei kongruente Figuren aus je sechs Pentominos



Zwei zueinander kongruente Figuren können auf verschiedene Arten achsensymmetrisch angeordnet werden, zum Beispiel:

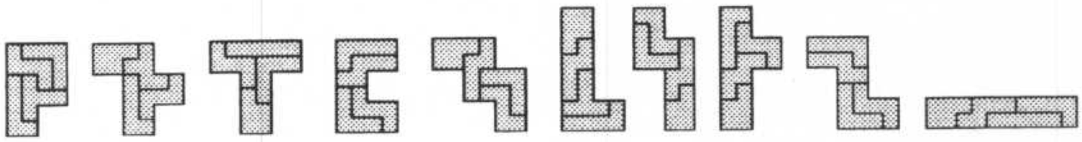


4. Ähnliche Figuren

Zueinander ähnliche Pentomino-Figuren zeigen Kindern spielerisch, dass der Flächeninhalt einer Figur bei einer Verdoppelung der Seitenlängen vervierfacht und bei einer Verdreifachung der Seitenlängen verneunfacht wird.

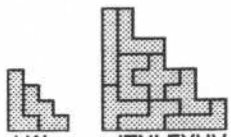
a) „Verdoppeln" der Pentominos:

Zehn der zwölf Pentominos können aus jeweils vier Steinen maßstäblich vergrößert nachgebaut werden. Beispiele für Lösungen sind:



b) Verdoppeln einer 10-Ominofigur:

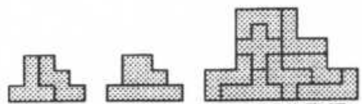
Zum Verdoppeln einer aus zwei Pentominos zusammengesetzten Figur benötigt man acht Steine, zum Beispiel:



LW ITNLFXUV

c) Eine „doppelte Verdoppelung":

Dieses Beispiel zeigt zwei zueinander kongruente Figuren aus je zwei Pentominos und eine dazu ähnliche Figur aus den restlichen acht Pentominos.



TW IP UXVNLFYZ

d) Verdoppeln einer 15-Ominofigur:

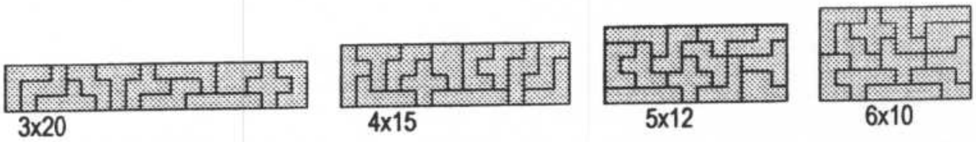
Unter Verwendung aller zwölf Pentominos kann man viele Figuren verdoppeln, die aus drei Pentominos bestehen. Insbesondere ergibt die Verdoppelung eines 3x5-Rechtecks ein 6x10-Rechteck.

e) Verdreifachen der zwölf Pentominos:

Jedes der zwölf Pentominos kann aus neun Steinen mit dreifacher Seitenlänge vergrößert nachgebaut werden. Dabei kann man für jede der zwölf Figuren sowohl Lösungen finden, bei denen der zu vergrößernde Stein nicht als Baustein vorkommt als auch Lösungen unter Verwendung des zu vergrößernden Steins:

5. Pentomino – Rechtecke

Alle zwölf Pentominos zusammen haben Flächeninhalt 60, und man kann damit 3x20-, 4x15-, 5x12- und auch 6x10-Rechtecke lückenlos ausfüllen:



3x20 4x15 5x12 6x10

Von symmetrischen Lagen abgesehen gibt es (siehe [12]):

- zwei Lösungen für 3x20- Rechtecke,
- 368 Lösungen für 4x15-Rechtecke,
- 1010 Lösungen für 5x12-Rechtecke
- und sogar 2339 Lösungen für 6x10-Rechtecke.

Daneben kann man aber auch noch Rechtecke aus einem, aus drei, aus vier, ..., aus elf Pentominos zusammensetzen: Hier sind Rechtecke mit den Seitenlängen 1x5, 3x5, 2x10, 4x5, 5x5, 3x10, 5x6, 5x7, 5x8, 4x10, 3x15, 5x9, 5x10 und 5x11 möglich.

a) Rechtecke lückenlos füllen

Man kann relativ einfach zeigen, dass es –von symmetrischen Lagen abgesehen- nur sieben verschiedene 3x5-Rechtecke gibt. Mit wachsender Zahl der Pentominos nimmt die Anzahl der möglichen Rechtecke dann sehr stark zu: So lassen sich schon 50 verschiedene 4x5-Rechtecke, 107 verschiedene 5x5-Quadrate, 541 mögliche 5x6-Rechtecke usw. zusammensetzen.

Als einfache Aufgabenstellung bietet sich hier etwa an,

- alle möglichen 3x5-Rechtecke,
- mindestens fünf verschiedene 4x5-Rechtecke (oder 5x5-Quadrate oder 5x6-Rechtecke,...),
- alle möglichen 4x5-Rechtecke, in denen das Z-Pentomino vorkommt,
- alle möglichen 3x10-Rechtecke, in denen das X-Pentomino vorkommt, ... zu suchen.

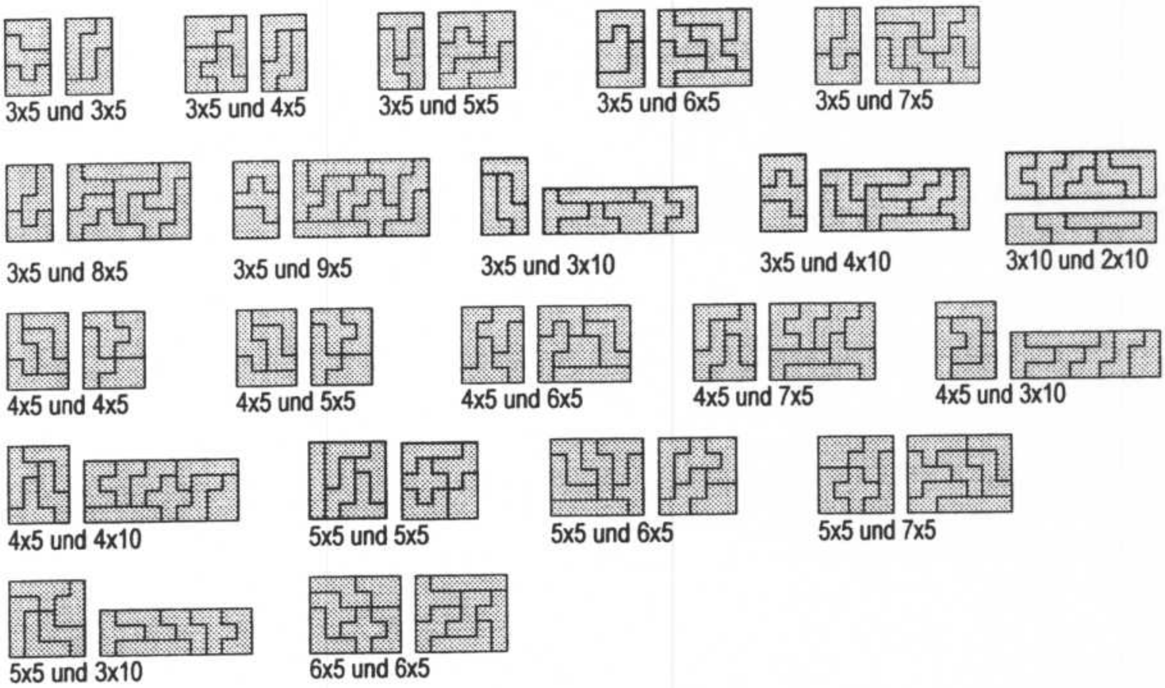
UPV UFP UNP UYP VPL TLY VNL

Die sieben möglichen 3x5-Rechtecke

b) Simultane Rechteckslösungen

Kann man aus den zwölf Pentominos gleichzeitig zwei 3x5-Rechtecke, oder gleichzeitig ein 3x5- und ein 4x5-Rechteck, ein 3x5- und ein 5x5-Rechteck, ein 3x5-und ein 5x6-Rechteck ... usw. zusammensetzen?

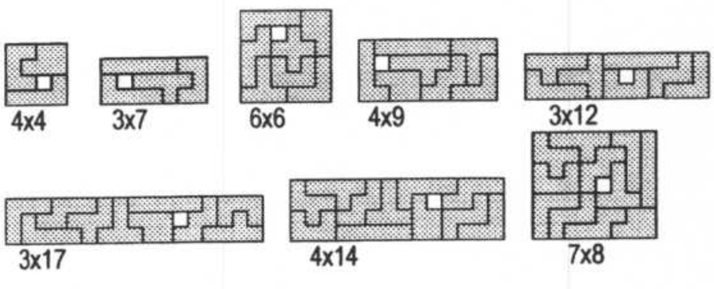
Die folgenden Abbildungen zeigen Lösungsbeispiele zu simultan möglichen Rechteckspaaren:



c) Pentomin o-Lochrechtecke

Neben Rechtecken, die sich lückenlos mit Pentominos füllen lassen, kann man auch rechteckige Figuren herstellen, die Lochflächen in ihrem Inneren enthalten.

- Welche Seitenlängen kann ein Pentomino-Rechteck haben, das ein einzelnes Quadrat als Loch in seinem Inneren enthält? Auf wie viele verschiedene Arten kann man dieses Loch positionieren, wenn symmetrische Lagen der gesamten Figur nicht unterschieden werden? Kann man für jede theoretisch mögliche Anordnung des Lochs tatsächlich eine Lösung finden?



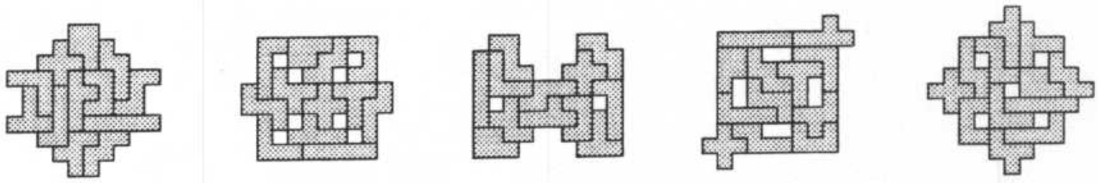
Alle möglichen Rechtecksformate mit genau einem Einzelloch

- Welche Seitenlängen kann ein Pentomino-Rechteck mit zwei, mit drei, mit vier,...usw. Einzellöchern haben? Wie viele Einzellöcher kann man höchstens im Inneren eines Pentomino-Rechtecks unterbringen?

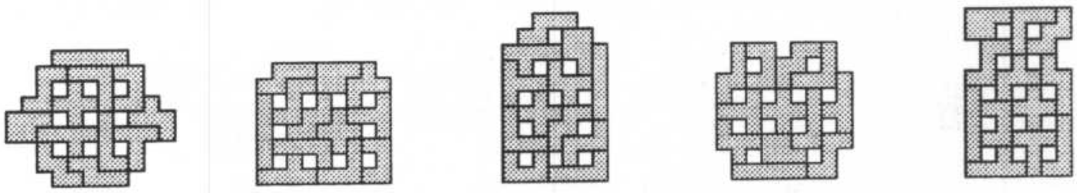
- Welchen Flächeninhalt und welche Seitenlängen kann, allgemeiner, eine aus zwölf Pentominos zusammengesetzte rechteckige Figur, die Lochflächen in ihrem Inneren enthält, annehmen? Wie groß kann der Flächeninhalt einer solchen Figur maximal sein?

6. Pentominos – eine Welt aus zwölf mal fünf Quadraten

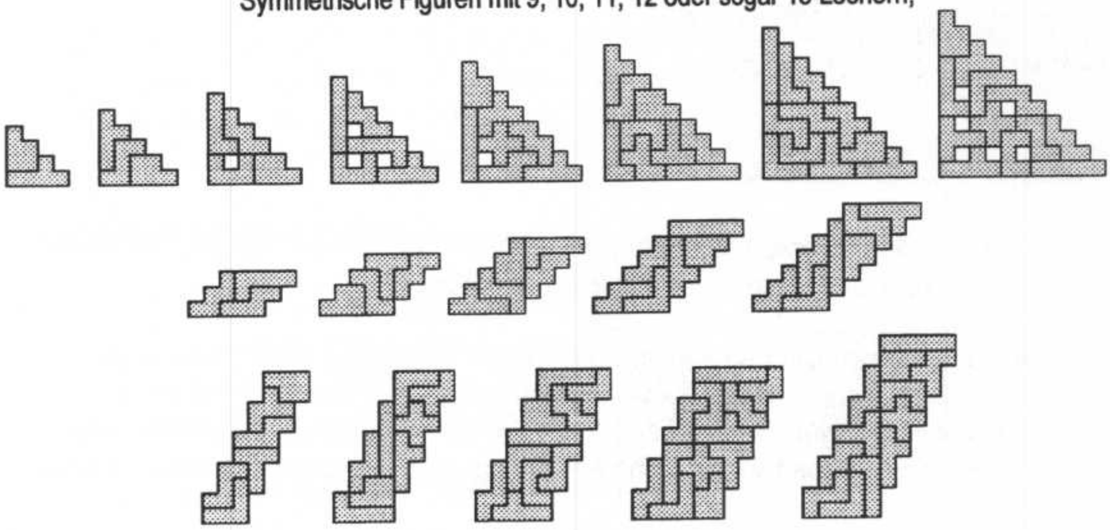
Schließlich kann man aus den zwölf Pentominosteinen - wie beim klassischen Tangramspiel - eine Vielzahl weiterer Figuren zusammensetzen, zum Beispiel:



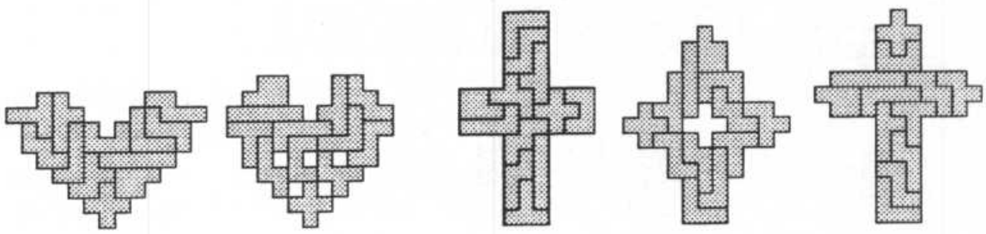
Symmetrische Figuren mit einer, mit zwei oder mit vier Symmetrieachsen,



Symmetrische Figuren mit 9, 10, 11, 12 oder sogar 13 Löchern,

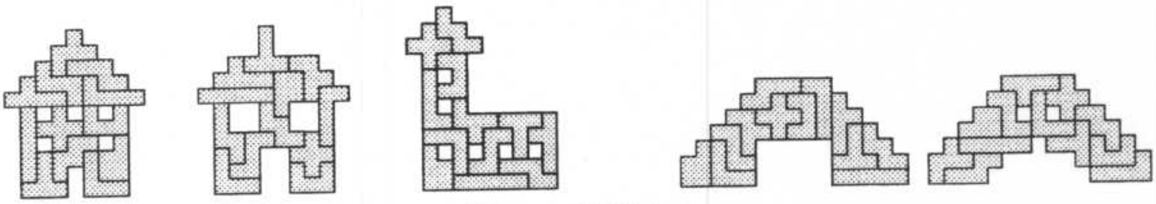


Stufendreiecke und Stufenparallelogramme,

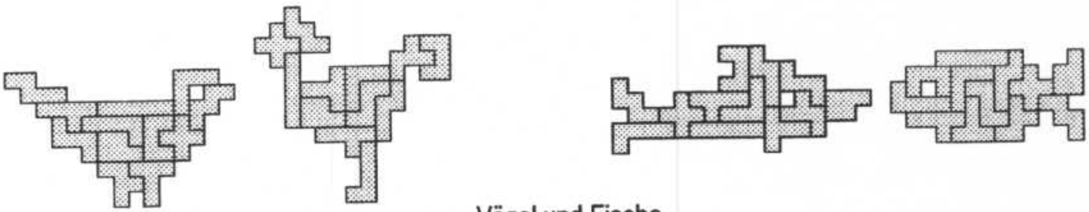


Herzen und Kreuze,

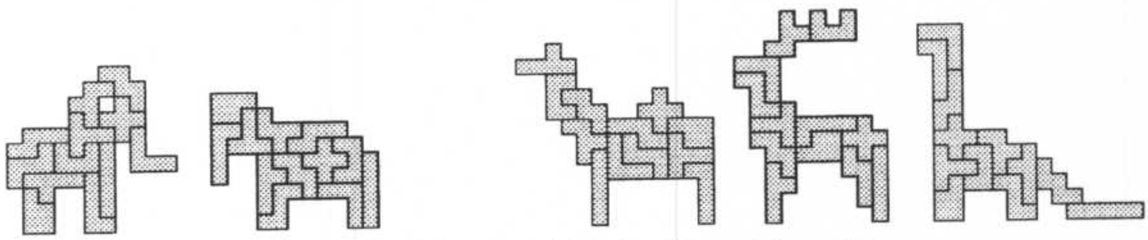
aber auch Buchstaben und Ziffern,



Häuser und Brücken,



Vögel und Fische,



sowie weitere Tiere – vom Elefanten bis zum Dinosaurier-
und noch viel, viel mehr (siehe [9]) .....

Literatur

[1] Albrecht-Bühler, G.: Die Pentomino-Werkstatt. Fischer Taschenbuchverlag, Frankfurt am Main (1992)
[2] Berlekamp, E. u. Rodgers, T.: The Mathemagician and Pied Puzzler. AK Peters, Natick (1999)
[3] Bouwkamp, C.J.: Simultaneous 4 by 5 and 4 by 10 pentomino rectangles. In J. Recreational Math. 3 , p.125 (1970)
[4] Dudeney, H.E.: The Canterbury Puzzles. Dover Publications, New York (1958, Nachdruck von 1907)
[5] Gardner, M.: New Mathematical Diversions from Scientific American. p. 150 – 161, Fireside Books, New York (1966)
[6] Gardner, M.: The Scientific American book of Mathematical Puzzles and Diversions. p. 124 – 140, Fireside Books, New York (1959)
[7] Golomb, S.W.: Checker boards and polyominoes. American Math. Monthly 61, p.675-682 (1954)
[8] Golomb, S.W.: Polyominoes. Charles Scribners Sons, New York (1965)
[9] Koth, M. u. Grosser, N.: Das Pentomino – Buch, Aulis Verlag Deubner, Köln (2004)
[10] Liu, A.: Pentomino problems. In J. Recreational Math.15, p.8 – 13 (1982)
[11] Machady, J.S.: Pentominoes – Some solved and unsolved problems. In J. Recreational Math. 2, p. 181-188 (1969)
[12] Martin, G.E.: Polyominoes – a guide to puzzles and problems in tiling. The Math. Assoc. of America (1991)
[13] O´Beirne, T.H.: Puzzles and Paradoxes No. 44. In New Scientist 259, p.316-317 (1961)
[14] Philpott, W.E.: The double-double pentomino problem. In J. Recreational Math. 14, p.61(1981)

Anschrift der Autorinnen:

Mag. Notburga Grosser
PA der Erzdiözese Wien,
Mayerweckstraße 1, 1210 Wien,
und Albertus Magnus Gymnasium,
Semperstraße 45, 1180 Wien
ngrosser@t-online.at

Dr. Maria Koth
Institut für Mathematik der Universität Wien,
Nordbergstraße 15, 1090 Wien,
und PA des Bundes in Wien,
Ettenreichgasse 45, 1100 Wien
maria.koth@univie.ac.at